Cálculo I
Examen VI

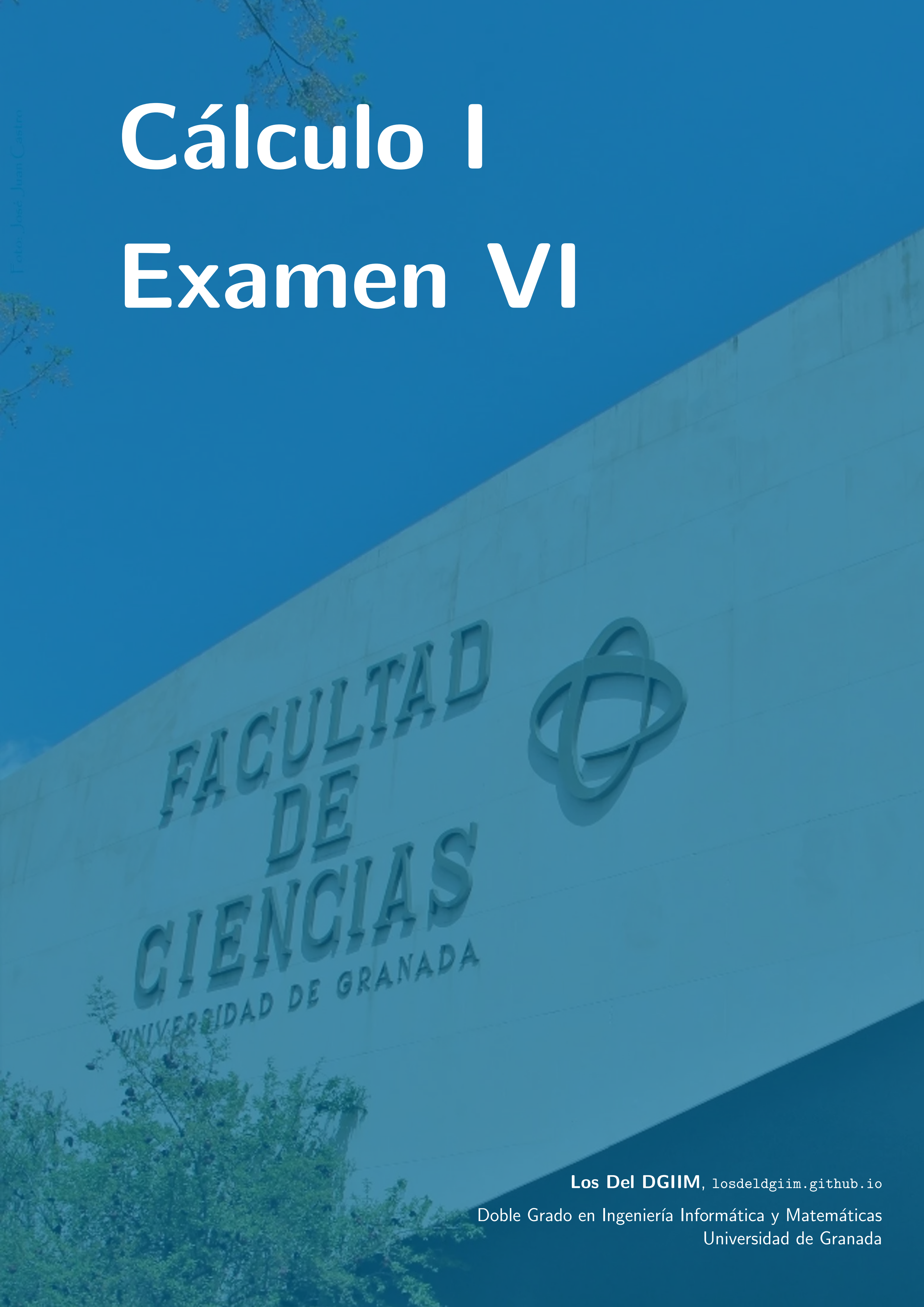

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Cálculo I
Examen VI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2023-2024

Asignatura Cálculo I.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Jose Luis Gámez Ruiz.

Descripción Examen de evaluación continua.

Fecha 16 de noviembre de 2022

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Escribe los siguientes enunciados:

1. Axioma del supremo.
   "Todo conjunto de números reales no vacío y mayorado tiene supremo"

2. Teorema de Bolzano-Weierstrass.
   "Toda sucesión acotada de números reales admite una parcial convergente"

3. Definición de sucesión de Cauchy.
   Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Se dice que $\{x_n\}$ es "de Cauchy" si:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} : \begin{array}{c} \text{si } p, q \in \mathbb{N} \\ p, q \geqslant m \end{array}, \text{ se tiene } |x_p - x_q| < \varepsilon$$

4. Criterio de Stolz. $\left(\text{para sucesiones del tipo } \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}\right)$
   Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sucesiones de números reales tales que $\{b_n\} \nearrow\!\nearrow +\infty$ (estrictamente creciente y divergente). Entonces,

$$\text{Si } \left\{\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right\} \longrightarrow L \Longrightarrow \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow L \quad (L \in \mathbb{R} \;\; \text{ó} \;\; \pm\infty)$$

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Prueba que la suma de los cubos de tres naturales consecutivos es siempre múltiplo de 9.

Esto es equivalente a probar que

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists k_n \in \mathbb{N} : n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k_n$$

Lo haremos por inducción:

∗ Caso $n = 1$

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 9 \cdot 4 \quad \text{Sí} \;\; (k_1 = 4)$$

∗ Supuesto cierto para n (hipótesis de inducción) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k_n \;\; (k_n \in \mathbb{N})$
¿Será ciero para $n+1$? Veamos...

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 = \\ = n^3 + (n+1)^3 + (n+3)^3 + 9(n^2 + 3n + 3) &\underset{(1)}{=} 9k_n + 9(n^2 + 3n + 3) = \\ &= 9\underbrace{(k_n + n^2 + 3n + 3)}_{k_{n+1}} \Longrightarrow \text{ Sí} \end{aligned}$$

Luego queda demostrado por inducción.

Ejercicio 3 (2 puntos)**.** Sea el número real $a \leqslant 1$ (fijo). Estudia la convergencia de la sucesión definida por recurrencia como: $x_1 = a$, $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Indicación: distingue casos, según sea $a = 1$, $0 < a < 1$, $a = 0$, $a < 0$.

Caso 1) $a = 1 \Longrightarrow x_n = 1\ \ \forall n \in \mathbb{N}\quad \{x_n\} = \{1\} \longrightarrow 1$

Caso 2) $0 < a < 1$. Probemos que $\{x_n\}$ $\underbrace{\text{decreciente}}_{(2)}$ y $\underbrace{\text{minorada}}_{(1)}$ (por 0).

(1) Por inducción.

- $*$ $n = 1\ \ x_1 = a > 0$
- $*$ Suponiendo $x_n > 0$ (hipótesis de inducción) ¿$\Rightarrow x_{n+1} > 0$?

$$x_{n+1} > 0 \Longleftrightarrow 1 - \sqrt{1 - x_n} > 0 \Longleftrightarrow \sqrt{1 - x_n} < 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 1 - x_n < 1 \Longleftrightarrow x_n > 0\ \ \text{Sí}$$

(2) $x_{n+1} < x_n \Longleftrightarrow 1 - \sqrt{1 - x_n} < x_n \Longleftrightarrow 1 - x_n < \sqrt{1 - x_n} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (1 - x_n)^2 < 1 - x_n \Longleftrightarrow 1 - x_n < 1 \Longleftrightarrow x_n > 0$ Sí

Por tanto, $\{x_n\}$ converge (a un límite "L"). Tomando límites en la fórmula de recurrencia,

$$\left.\begin{array}{cl} x_{n+1} & \longrightarrow L \\ \shortparallel & \\ 1 - \sqrt{1 - x_n} & \longrightarrow 1 - \sqrt{1 - L} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{del límite)}]{\text{(unicidad}} L = 1 - \sqrt{1 - L} \Rightarrow \ldots \left\{\begin{array}{c} L = 1 \\ \vee \\ L = 0 \end{array}\right.$$

(El caso $L = 1$ no puede darse porque $\{x_n\} \searrow\!\searrow$, < 1)
Luego en el caso $0 < a < 1$ obtenemos $\{x_n\} \searrow\!\searrow 0$.

Caso 3) $a = 0 \Longrightarrow x_n = 0\ \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \{x_n\} = \{0\} \longrightarrow 0$.

Caso 4) $a < 0$. Probemos que $\{x_n\}$ es $\underbrace{\text{creciente}}_{(2)}$ y $\underbrace{\text{mayorada}}_{(1)}$ (por 0).

(1) Por inducción

- $*$ $n = 1\ \ x_1 = a < 0$
- $*$ Suponiendo $x_n < 0$ (hipótesis de inducción) ¿$\Rightarrow x_{n+1} < 0$?

$$x_{n+1} < 0 \Longleftrightarrow 1 - \sqrt{1 - x_n} < 0 \Longleftrightarrow \sqrt{1 - x_n} < 1 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow 1 - x_n < 1 \Longleftrightarrow x_n < 0\ \ \text{Sí}$$

(2) $x_{n+1} > x_n \Longleftrightarrow 1 - \sqrt{1 - x_n} > x_n \Longleftrightarrow 1 - x_n > \sqrt{1 - x_n} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (1 - x_n)^2 > 1 - x_n \Longleftrightarrow 1 - x_n > 1 \Longleftrightarrow x_n < 0$ Sí

Por tanto, $\{x_n\}$ converge (a un límite "L"). Tomando límites en la fórmula de recurrencia,

$$\left.\begin{array}{cc} x_{n+1} & \longrightarrow L \\ \shortparallel & \\ 1-\sqrt{1-x_n} & \longrightarrow 1-\sqrt{1-L} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{del límite)}]{\text{(unicidad}} L = 1-\sqrt{1-L} \Rightarrow \dots \left\{\begin{array}{c} L=1 \\ \vee \\ L=0 \end{array}\right.$$

(El caso $L = 1$ no puede darse porque $x_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$)
Luego en el caso $a < 0$ obtenemos $\{x_n\} \nearrow\!\!\nearrow 0$.

Ejercicio 4 (2 puntos)**.** Sean las sucesiones de números reales positivos $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, que verifican que $\{a_n\} \longrightarrow +\infty$ y que $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow 2$.

Estudiar la **convergencia o divergencia** de $\{b_n\}$ y de $\left\{\dfrac{\ln(a_n)}{\ln(b_n)}\right\}$

1. Convergencia de $\{b_n\}$.

$$\{b_n\} = \left\{\frac{b_n}{a_n} \cdot a_n\right\} \xrightarrow{(*)} +\infty$$

Donde en $(*)$ he aplicado que $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\} \longrightarrow \dfrac{1}{2} > 0$ y que $\{a_n\} \longrightarrow +\infty$.
Por tanto, la sucesión $\{b_n\}$ diverge positivamente ($\{b_n\} \nearrow\!\!\nearrow +\infty$)

2. Convergencia de $\left\{\dfrac{\ln(a_n)}{\ln(b_n)}\right\}$.

$$\frac{\ln(a_n)}{\ln(b_n)} = \frac{\ln\left(b_n \cdot \frac{a_n}{b_n}\right)}{\ln(b_n)} = \frac{\ln(b_n) + \ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right)}{\ln(b_n)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{a_n}{b_n}\right)}{\ln(b_n)} \xrightarrow{(*)} 1$$

Donde en $(*)$ he aplicado que $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} \longrightarrow \ln(2)$ y que $\{b_n\} \longrightarrow +\infty$

Ejercicio 5 (2 puntos)**.** Estudia la convergencia de la sucesión:

$$\left\{\left[1 + \ln\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)\right]^{4n+1}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Defino } \{x_n\} = \left\{1 + \ln\underbrace{\left(\dfrac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)}_{\to 1}\right\} \longrightarrow 1 \\ \\ \{y_n\} = \{4n+1\} \end{array}\right\} \left(\begin{array}{c}\text{puedo aplicar el} \\ \text{criterio de Euler}\end{array}\right)$$

$$x_n^{y_n} \longrightarrow e^L \Longleftrightarrow y_n(x_n - 1) \longrightarrow L$$

$$\begin{aligned} y_n(x_n - 1) = (4n+1)\ln\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right) = \ln\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right)^{(4n+1)} = \\ = \ln \underbrace{(x_n)^{y_n}}_{(*)\to e^{-4}} \longrightarrow \ln(e^{-4}) = -4 \end{aligned}$$

Donde en $(*)$ he aplicado de nuevo el criterio de Euler:

$$\left.\begin{array}{l} \{x_n\} = \left\{\dfrac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\right\} \longrightarrow 1 \\ \\ \{y_n\} = \{4n+1\} \end{array}\right\} \left(\begin{array}{c} \text{puedo aplicar el} \\ \text{criterio de Euler} \end{array}\right)$$

$$x_n^{y_n} \longrightarrow e^H \Longleftrightarrow y_n(x_n - 1) \longrightarrow H$$

$$\begin{aligned} y_n(x_n - 1) = (4n+1)\left(\frac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n} - 1\right) = \\ = (4n+1)\left(\frac{\cancel{3n^2}+2n+1-\cancel{3n^2}-5n}{3n^2+5n}\right) \longrightarrow -4 \end{aligned}$$

Luego $x_n^{y_n} \longrightarrow e^{-4}$.

$\square$

Así, $L = -4$ y por el criterio de Euler, $x_n^{y_n} \longrightarrow e^{-4}$.